РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задание:

Решить задачи 1, 2, 3.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Для решения использовать систему MathCad

2. Файл с решением высылается преподавателю

3. Номер варианта соответствует последней цифре в номере зачетной книжки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:

Обычно решение заключается в нахождении ряда значений x_i и y_i искомой зависимости y (x) при i, изменяющемся от 0 до N при шаге изменения x, равном h. Будем рассматривать способы решения дифференциального уравнения, при которых h = const.

Рассмотрим методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида $Y' = f(X, Y)$.

Метод Эйлера реализуется применением на каждом шаге вычислений следующих итерационных выражений:

$x_{i+1} = x_i + h$

$y_{i+1} = y_i + hf(x, y)$

При этом для i = 0 значения x_0 и y_0 должны быть известны как начальные условия, без чего невозможно единственное решение. Погрешность метода пропорциональна h^2.

Для уменьшения погрешности решения следует применять более точные методы. Например, метод Эйлера с пересчетом реализуется следующими итерационными выражениями на каждом шаге вычислений:

$x_{i+1} = x_i + h$

$y_{i+1} = y_i + h * (f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h * f(x_i, y_i))) / 2$

Погрешность метода пропорциональна h^3.

При высоких требованиях к точности решения можно воспользоваться **методом Рунге-Кутта**, реализующийся следующими формулами:

$K_1(x, y) = h*f(x, y)$

$K_2(x, y) = h*f(x + h/2, y + k_1(x, y)/2)$

$K_3(x, y) = h*f(x + h/2, y + k_2(x, y)/2)$

$K_4(x, y) = h*f(x + h, y_i + k_3(x, y))$

$x_{i+1} = x_i + h$

$y_{i+1} = y_i + (k_1(x, y) + 2* K_2(x, y) + 2* K_3(x, y) + K_4(x, y)) / 6$

Погрешность метода пропорциональна h^5.

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений 2 порядка $Y'' + p(x)Y' + g(x)Y = f(x)$

с граничными условиями

$k_{11}*Y(a) + k_{12}*Y'(a) = A,$

$K_{21}*Y(b) + k_{22}*Y'(b) = B,$

также применяется **метод конечных разностей**, при этом производные входящие в уравнение и дополнительные условия заменяются следующими конечно-разностными отношениями

$$Y' = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h} \qquad Y' = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h} \qquad Y' = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{h}$$

$$Y''_{i+1} = \frac{Y'_{i+1} - Y'_i}{h} = \frac{Y_{i+1} - Y_i - Y_i - Y_{i-1}}{h^2} = \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{h^2}$$

В результате получим систему алгебраических уравнений, решение которой даст таблицу приближенных значений искомой функции.

Пример 1. Решить обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

Y''+XY'-0,5Y/X=1 с граничными условиями:

Решение:

$$\frac{Y_{i+1}-2Y_i+Y_{i-1}}{h^2}+X_i\frac{Y_{i+1}-Y_i}{h}-0.5\frac{Y_i}{X_i}=1 \qquad (i = 1,2)$$

Из краевых условий составим конечно-разностные уравнения в конечных точках

$$Y_0+2\frac{Y_1-Y_0}{h}=1$$

$Y_3 = 2.15$

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{Y_2-2Y_1+Y_0}{0.01}+2.1\frac{Y_2-Y_1}{0.1}-0.5\frac{Y_1}{2.1}=1 \\ \frac{Y_3-2Y_2+Y_1}{0.01}+2.2\frac{Y_3-Y_2}{0.1}-0.5\frac{Y_2}{2.2}=1 \\ Y_0+2\frac{Y_1-Y_0}{0.1}=1 \\ Y_3=2.15 \end{cases}$$

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ

Задание 1. Решите на отрезке $[x_0, x_{end}]$ задачу Коши $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ методом Рунге-Кутта с постоянным шагом. Вид уравнения и начальные значения заданы в таблице 1. Изобразите графики решений, вычисленных с шагами h, $2h$ и $h/2$.

Таблица 1 – Данные для расчета

Вариант	$f(x, y, y')=0$	Начальное условие	x_{end}
1	$(e^x + 1)dy + e^x dx = 0$	$y(0) = 0.5$	2
2	$y \ln y + xy' = 0$	$y(1) = e$	2.6
3	$\sqrt{4 - x^2}\, y' + xy^2 + x = 0$	$y(0) = -tg2$	2
4	$3e^x tgy\ dx + \dfrac{2 - e^x}{\cos^2 x} dy = 0$	$y(1) = arctg(2 - e)$	3
5	$(1 - e^x)yy' = e^x$	$y(0) = 1$	2.8
6	$y' \sin x = y \ln y$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$	π
7	$\dfrac{xdx}{1+y} - \dfrac{ydy}{1+x} = 0$	$y(1) = 1$	3
8	$(1 + y^2)dx = xdy$	$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$	π
9	$2\sqrt{y} = y'$	$y(0) = 1$	2
0	$(e^x + 2)dy + 2e^x dx = 0$	$y(0) = \dfrac{1}{9}$	1.6

Порядок выполнения задания:

1. Присвойте начальное значение решения переменной y_0 .
2. Определите правую часть уравнения $f(x,y)$.
3. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле N= $\dfrac{|x_{end} - x_0|}{h}$.
4. Сохраните решение в матрице У1.
5. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле N= $2\dfrac{|x_{end} - x_0|}{h}$.

1. Сохраните решение в матрице У2.

7. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле N= $\dfrac{|x_{end} - x_0|}{2h}$.
8. Сохраните решение в матрице У3.
9. Постройте на одном графике все три найденных решения.
10. Оцените погрешности найденных решений по формуле Рунге.

Задание 2. Решите задачу Коши

$y_1' = f_1(x, y_1, y_2)$, $y_2' = f_2(x, y_1, y_2)$, $y_1(a) = y_{1,0}, y_2(a) = y_{2,0}$ на отрезке $[a,b]$ методом Рунге-Кутты с постоянным шагом h=0.1. Изобразите графики решений, вычисленных с шагом h, $2h$ и $h/2$. Вид уравнений и начальные значения заданы в таблице 2.

Вариант	$f_1(x, y_1, y_2)$	$f_2(x, y_1, y_2)$	$y_1(a)$	$y_2(a)$	a	b
1	$arctg\left(\frac{1}{1+y_1^2+y_2^2}\right)$	$\sin(y_1 y_2)$	1	0	-1	1
2	$arctg(x^2+y_2^2)$	$\sin(x+y_1)$	0.5	1.5	0	2
3	$x^2 y_1 + y_2$	$\cos(y_1 + xy_2)$	-1	1	0	4
4	$x^2 + y_2^2$	xy_1y_2	1	0	0	5
5	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y_2^2}}$	$\frac{y_2}{\sqrt{1+x^2+y_1^2}}$	0.2	0	-1	1
6	$\sin(x^2+y_2^2)$	$\cos(xy_1)$	0	0	0	4
7	$\sin y_2$	$\cos y_1$	0.5	-0.5	-1	3
8	$x\cos(y_1+y_2)$	$\sin(y_1-y_2)$	-0.6	2	2	5
9	$\sin y_1 \cos^2 y_2$	$\cos y_1 \cos y_2$	0	0	-1	3
0	$2\sqrt{3x^2+y_1^2+y_1}$	$\sqrt{x^2+y_1^2+y_2}$	1.2	1.2	0	2

Порядок выполнения задания:

1. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
2. Присвойте начальное значение решения переменной y_0.
3. Определите правую часть уравнения $f(x,y)$.
4. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле $N=\frac{|x_{end}-x_0|}{h}$.

5. Сохраните решение в матрице У1.

6. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле N= $2\frac{|x_{end}-x_0|}{h}$.

7. Сохраните решение в матрице У2.

8. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле N= $\frac{|x_{end}-x_0|}{2h}$.

9. Сохраните решение в матрице У3.

10. Постройте на одном графике все три найденные решения.

11. Оцените погрешности найденных решений по формуле Рунге.

Задание 3. Найдите общее решение линейного однородного уравнения второго порядка $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Решите задачу Коши $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $y(a) = y_0, y'(a) = y_1$. Изобразите его график. Значения параметров a_1, a_2 и a заданы в таблице 3.

Таблица 3 – Данные для расчета

Вариант	a_1	a_2	$y(a)$	$y'(a)$	a
1	2	0	1	1	0
2	-4	4	0	1	0
3	2	0	0	0	π/2
4	0	1	3	0	-π/2
5	2	5	0	0	1
6	-4	4	1	1	0.3
7	6	13	-1	1	0.25
8	0	1	4	1	π/2
9	2	5	6	2	-π/2
10	-4	8	0	2	1
11	2	0	0	2	0
12	-4	4	-1	0.5	2

Порядок выполнения задания:

1. Присвойте переменной ORIGIN значение, равное единице.
2. Присвойте начальное значение решения переменной y_0.
3. Определите правую часть уравнения $f(x,y)$.
4. Вычислите решение, используя функцию rkfixed с параметром N, вычисленным по формуле $N = \frac{|x_{end} - x_0|}{h}$.
5. Сохраните решение в матрице У1.