ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Задание:

Для функции $f(x)$, заданной своими значениями в точках $x_0,...,x_n$, построить интерполяционный многочлен Ньютона с использованием разделенных разностей. Для вариантов с четными номерами использовать формулу интерполирования вперед, для вариантов с нечетными номерами - формулу интерполирования назад.

Сравнить графики аппроксимируемой функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена внутри и за пределами отрезка интерполирования. Построить график погрешности интерполяции.

Качественно, с помощью графиков, оценить влияние на погрешность количества и расположения внутренних узлов интерполяции $x_1,...,x_{n-1}$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Для решения уравнения использовать систему MathCad
2. Файл с решением высылается преподавателю
3. Номер варианта соответствует последней цифре в номере зачетной книжки.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:

Разделенные разности можно определить рекурсивно. Для функции f(x) разделенная разность первого порядка определяется формулой

$$f(x_i;x_{i+1}) = (f(x_{i+1})- f(x_i)) / (x_{i+1}- x_i); \qquad (1)$$

разность n-го порядка определяется через разности порядка $(n-1)$:

$$f(x_i;...;x_{i+n}) = (f(x_{i+1};...;x_{i+n}) - f(x_i;...;x_{i+n-1})) / (x_{i+n} - x_i). \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2) $x_i,...,x_{i+n}$ - произвольные точки.

Разности, необходимые для построения интерполяционного многочлена, можно найти путем последовательного построения треугольной таблицы:

x	$f(x)$	Разности 1-го порядка	Разности 2-го порядка	...
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0;x_1)=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$f(x_0;x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1;x_2)-f(x_0;x_1)}{x_2-x_0}$	...
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	...	
x_2	$f(x_2)$	...		
...	...			

Разность n-го порядка можно вычислить также с помощью общей формулы

$$f(x_0;...;x_n) = \sum_{k=0}^{n}\left[f(x_k) / \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)\right]. \qquad (3)$$

Интерполяционная формула Ньютона с использованием разделенных разностей может быть записана в одном из видов:

$$L(x)=f(x_0)+f(x_0;x_1)(x-x_0)+f(x_0; x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) +...+ f(x_0; ...;x_n)(x-x_0)...(x-x_{n-1}), \qquad (4)$$

$$L(x)=f(x_n)+f(x_{n-1};x_n)(x-x_n)+f(x_{n-2}; x_{n-1};x_n)(x-x_n)(x-x_{n-1}) +...+ f(x_0; ...;x_n)(x-x_n)...(x-x_1). \qquad (5)$$

Если последовательность точек $x_0,...,x_n$ - монотонна, т.е. $x_0< x_1<...< x_n$, то формулу (4) называют формулой для интерполирования вперед, а формулу (5) - формулой для интерполирования назад. На самом деле при построении интерполяционных многочленов с разделенными разностями не существует ограничений на расположение и нумерацию узлов интерполяции, что позволяет путем смещения узлов минимизировать погрешность интерполяции.

Обозначим: $x_{\min} = \underset{0 \le i \le n}{Min}\, x_i$, $x_{\max} = \underset{0 \le i \le n}{Max}\, x_i$.

Отрезок [x_{min}, x_{max}] называется отрезком интерполяции, область вне этого отрезка называется областью экстраполяции.

На соседних подотрезках [x_{i-1}, x_i], [x_i, x_{i+1}] погрешность интерполяции имеет разные знаки, и абсолютная величина погрешности достигает максимума вблизи середины каждого подотрезка. Смещение узла интерполяции x_i приводит к уменьшению абсолютной величины погрешности на одном из соседних подотрезков и увеличению – на другом.

В области экстраполяции абсолютная величина погрешности монотонно растет по мере удаления от граничных точек x_{min}, x_{max}.

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ

0. $f(x) = \mathrm{Sin}(\pi\, \mathrm{Sin}(\pi\, x))$, $x_{\min}=0$, $x_{\max}=1$, $n=5$.
1. Резонансная характеристика колебательного контура: $f(x) = 1 / \mathrm{Sqrt}(1 + x^2)$, $x_{\min}=-3$, $x_{\max}=3$, $n=4$.
2. $f(x) = \mathrm{Sin}(\pi\, \mathrm{Cos}(\pi\, x))$, $x_{\min}=0$, $x_{\max}=1$, $n=5$.
3. $f(x) = \mathrm{Sin}(x) / \mathrm{Sqrt}(1 + x^6)$, $x_{\min}=-\pi$, $x_{\max}=\pi$, $n=6$.
4. $f(x) = \exp(-b\, x)\, \mathrm{Sin}[\pi(x + x^2)]$, $b=0.15$, $x_{\min}=0$, $x_{\max}=1$, $n=4$.
5. $f(x) = (x^4 + 8)\exp[-(x/2)^2]$, $x_{\min}=-4$, $x_{\max}=4$, $n=8$.
6. $f(x) = \exp(-b\, x)\, \mathrm{Cos}[\pi(x + x^2)]$, $b=0.15$, $x_{\min}=0$, $x_{\max}=1$, $n=4$.
7. $f(x) = \mathrm{Cos}(\pi\, x^2)$, $x_{\min}=0$, $x_{\max}=1$, $n=4$.
8. $f(x) = \mathrm{Cos}(2\pi\, x^3)$, $x_{\min}=0$, $x_{\max}=1$, $n=5$.
9. $f(x) = \mathrm{Sin}[2\pi\, \mathrm{Sin}^2(\pi\, x/2)]$, $x_{\min}=0$, $x_{\max}=1$, $n=6$.