РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Задание:

Для заданного варианта решить методом итераций систему уравнений $A \cdot X = B$. Для остановки процесса последовательных приближений использовать условие: сумма модулей приращений элементов вектора X на последнем шаге итераций меньше $\varepsilon = 0.001$.

Используя метод Гаусса, вычислить определитель и число обусловленности матрицы А.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Для решения использовать систему MathCad

2. Файл с решением высылается преподавателю

3. Номер варианта соответствует последней цифре в номере зачетной книжки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:

Система линейных алгебраических уравнений в векторной форме имеет вид:

$$A \cdot X = B, \qquad (1)$$

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$ **- матрица системы**,

$X^T = (x_1, \dots, x_n)$ **- вектор неизвестных**,

$B^T = (b_1, \dots, b_n)$ **- вектор свободных коэффициентов**.

Если определитель матрицы ***A*** не равен нулю (матрица – невырожденная), то существует единственное решение системы (1).

Метод Гаусса для решения системы линейных алгебраических уравнений включает два этапа:

1) преобразование матрицы ***A*** к верхней треугольной матрице;

2) последовательное вычисление неизвестных $x_n, \dots, x_1$.

Преобразование матрицы ***A*** сопровождается преобразованием столбца свободных коэффициентов, т.е. преобразуется расширенная матрица системы [***A***|***B***], включающая матрицу ***A*** и столбец ***B***. Преобразование заключается в последовательном обнулении элементов матрицы ***A***, расположенных ниже главной диагонали.

Первый шаг первого этапа состоит в обнулении элементов первого столбца a_{i1}, $i=2,\dots,n$; для этого первая строка матрицы, помноженная, соответственно, на коэффициенты a_{i1}/a_{11}, последовательно вычитается из последующих строк. При этом первая строка называется ведущей строкой, а элемент a_{11} - ведущим или главным элементом. Очевидно, что главный элемент не может быть равен нулю - следовательно, предварительно может потребоваться перестановка строк расширенной матрицы.

Второй шаг - обнуление элементов второго столбца. На этом шаге главным элементом является элемент a_{22}^{1} - преобразованный в процессе выполнения первого шага элемент a_{22}. Затем обнуляются элементы третьего столбца и т.д.

На каждом шаге ведущий элемент не может быть равен нулю. Кроме того, с целью повышения точности вычислений целесообразно выбирать в качестве главного элемента наибольший по модулю элемент соответствующего столбца. Поэтому на каждом шаге обнулений предусматривается перестановка строк. Такая разновидность метода Гаусса называется алгоритмом с частичным выбором главного элемента.

После завершения первого этапа расширенная матрица системы принимает вид [***U***|***F***], где ***U***=[u_{ij}] - верхняя треугольная матрица - результат преобразования матрицы ***A***, а ***F*** - результат преобразования столбца свободных коэффициентов.

На втором этапе последовательно вычисляются: $x_n = f_n / u_{nn}$; $x_i = (f_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} \cdot x_j) / u_{ii}$, *i=n-1,...,1.*

Пример 1. Решим систему линейных уравнений, последовательно преобразовывая расширенную матрицу системы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5.2 & 9 & 2.4 \\ 5 & 1 & -1 & 8 \\ 10 & 2 & -10 & 24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 2 & -10 & 24 \\ 5 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 5.2 & 9 & 2.4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 2 & -10 & 24 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 2 & -10 & 24 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Вначале переставляем строки так, чтобы ведущий элемент был максимальным. Затем вычитаем элементы первой строки из второй, умножив их на коэффициент 5/10, и из третьей, умножив элементы первой строки на коэффициент 1/10. На этом заканчивается процесс обнуления элементов первого столбца.

Процесс обнуления элементов второго столбца в данном случае сводится просто к перестановке строк.

Второй этап состоит в последовательном вычислении:

$$x_3 = -4/4 = -1,\quad x_2 = -10 \cdot x_3 / 5 = 2,\quad x_1 = (24 - 2 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3)/10 = 1.$$

Для матрицы, приведенной к треугольному виду, вычисление определителя сводится к перемножению элементов, стоящих на главной диагонали; при этом следует учесть, что каждая перестановка строк меняет знак определителя.

Число обусловленности матрицы ***A*** вычисляется по формуле:

Cond(***A***)=||***A***||*||$\boldsymbol{A^{-1}}$||,

где $\boldsymbol{A^{-1}}$ - обратная матрица, $\|A\| = \underset{1<i<n}{Max} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ - норма матрицы.

Число обусловленности характеризует близость матрицы к вырожденной матрице. Для единичной матрицы Cond(***E***)=1; для произвольной матрицы Cond(***A***)≥ 1. Чем ближе матрица к вырожденной, тем больше число обусловленности. Если число обусловленности матрицы ***A*** - велико, то решение системы уравнений $A \cdot X = B$ становится некорректной задачей. Если правая часть системы задана с погрешностью: $B + \delta B$ вместо $\boldsymbol{B}$, - то погрешность решения удовлетворяет неравенству

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le Cond(A) \cdot \frac{\|\delta B\|}{\|B\|},$$

где $\|X\| = \underset{1 \le i \le n}{Max} |x_i|$ - норма вектора $\boldsymbol{X}$.

Для нахождения обратной матрицы следует n раз решить систему

$$A \cdot X = e_i, \qquad i=1,...,n, \qquad (2)$$

где e_i - i-й столбец единичной матрицы. При решении систем уравнений (2) методом Гаусса целесообразно преобразовывать сразу расширенную матрицу [$\boldsymbol{A}$|$\boldsymbol{E}$], включающую исходную и единичную матрицы. При этом можно воспользоваться разновидностью метода Гаусса, называемой схемой Жордана. В соответствии со схемой Жордана исходная матрица преобразуется к единичной. Сначала матрица А приводится к диагональной: с помощью ведущих элементов каждого столбца производится обнуление элементов, расположенных как выше, так и ниже главной диагонали. В заключение каждая строка расширенной матрицы делится на соответствующий диагональный элемент. В результате преобразований формируется расширенная матрица [$\boldsymbol{E}$|$\boldsymbol{A}^{-1}$], содержащая в правой части искомую обратную матрицу.

При решении системы уравнений методом итераций исходная система $A \cdot X = B$ приводится к эквивалентному виду:

$$X = C \cdot X + F \qquad (3)$$

и формируется итерационный процесс

$$X^{k+1} = C \cdot X^k + F, \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{X}^k$ - вектор, получаемый на k-м шаге процесса итераций. Более подробно итерационный процесс можно записать в виде:

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^k + f_i, \qquad i=1,...,n. \qquad (5)$$

Итерационный процесс сходится независимо от выбора вектора начального приближения $\boldsymbol{X}^0$, если выполнено условие:

$$\underset{1 \le i \le n}{Max} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \le q < 1 . \qquad (6)$$

Приведение исходной системы к нужному виду может быть произведено следующим образом. Решим i-е уравнение системы

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{ii}x_i + ... + a_{in}x_n = b_i$$

относительно x_i:

$$x_i = (-\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ij}x_j + b_i) / a_{ii}, \qquad i=1,...,n. \qquad (7)$$

В результате получаем систему вида (3), где элементы матрицы $\boldsymbol{C}$ равны $c_{ij}=-a_{ij}/a_{ii}$, если $j \ne i$, и $c_{ii}=0$, а элементы вектора $\boldsymbol{F}$ равны $f_i=b_i/a_{ii}$, для всех

$i=1,...,n$. При этом для выполнения условия сходимости (6) достаточно, чтобы в матрице $\boldsymbol{A}$ диагональные элементы были преобладающими:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Преобладания диагональных элементов можно добиться с помощью элементарных операций над строками исходной матрицы: перестановкой строк и суммированием строк, взятых с подходящими коэффициентами.

Пример 2. Решим систему линейных уравнений методом итераций, предварительно преобразовав уравнения так, чтобы диагональные элементы матрицы А были преобладающими:

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & -1 & 33 \\ -18 & 15 & 6 & -30 \\ 0 & 7 & -2 & 58 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 8 & -4 & -1 & 33 \\ 0 & 7 & -2 & 58 \\ -18 & 15 & 6 & -30 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 8 & -4 & -1 & 33 \\ 0 & 7 & -2 & 58 \\ -2 & 0 & 6 & -22 \end{bmatrix}.$$

На первом шаге переставляем вторую и третью строки матрицы, на втором - прибавляем к третьей строке первую строку с весовым коэффициентом 2 и вторую строку с коэффициентом -1. Записываем итерационный процесс:

$$x_1^{k+1} = (4 \cdot x_2^k + x_3^k + 33)/8, \quad x_2^{k+1} = (2 \cdot x_3^k + 58)/7, \quad x_3^{k+1} = (2 \cdot x_1^k - 26)/6.$$

Результаты расчетов приведены в таблице:

k	0	1	2	...	7	8
x_1^k	4.125	7.81	7.458	...	7.997	7.998
x_2^k	8.286	7.238	7.631	...	7.997	7.999
x_3^k	-3.667	-2.292	-1.063	...	-1.003	-1.001

Точное решение системы равно X^T = (8, 8, -1).

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ

№ варианта	Задание
1	$\begin{cases} 4{,}4x_1 - 2{,}5x_2 + 19{,}2x_3 - 10{,}8x_4 = 4{,}3, \\ 5{,}5x_1 - 9{,}3x_2 - 14{,}2x_3 + 13{,}2x_4 = 6{,}8, \\ 7{,}1x_1 - 11{,}5x_2 + 5{,}3x_3 - 6{,}7x_4 = -1{,}8, \\ 14{,}2x_1 + 23{,}4x_2 - 8{,}8x_3 + 5{,}3x_4 = 7{,}2. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 8{,}2x_1 - 3{,}2x_2 + 14{,}2x_3 + 14{,}8x_4 = -8{,}4, \\ 5{,}6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6{,}4x_4 = 4{,}5, \\ 5{,}7x_1 + 3{,}6x_2 - 12{,}4x_3 - 2{,}3x_4 = 3{,}3, \\ 6{,}8x_1 + 13{,}2x_2 - 6{,}3x_3 - 8{,}7x_4 = 14{,}3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 5{,}7x_1 - 7{,}8x_2 - 5{,}6x_3 - 8{,}3x_4 = 2{,}7, \\ 6{,}6x_1 + 13{,}1x_2 - 6{,}3x_3 + 4{,}3x_4 = -5{,}5, \\ 14{,}7x_1 - 2{,}8x_2 + 5{,}6x_3 - 12{,}1x_4 = 8{,}6, \\ 8{,}5x_1 + 12{,}7x_2 - 23{,}7x_3 + 5{,}7x_4 = 14{,}7. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3{,}8x_1 + 14{,}2x_2 + 6{,}3x_3 - 15{,}5x_4 = 2{,}8, \\ 8{,}3x_1 - 6{,}6x_2 + 5{,}8x_3 + 12{,}2x_4 = -4{,}7, \\ 6{,}4x_1 - 8{,}5x_2 - 4{,}3x_3 + 8{,}8x_4 = 7{,}7, \\ 17{,}1x_1 - 8{,}3x_2 + 14{,}4x_3 - 7{,}2x_4 = 13{,}5. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 15{,}7x_1 + 6{,}6x_2 - 5{,}7x_3 + 11{,}5x_4 = -2{,}4, \\ 8{,}8x_1 - 6{,}7x_2 + 5{,}5x_3 - 4{,}5x_4 = 5{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 5{,}7x_2 - 23{,}4x_3 + 6{,}6x_4 = 7{,}7, \\ 14{,}3x_1 + 8{,}7x_2 - 15{,}7x_3 - 5{,}8x_4 = 23{,}4. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 4{,}3x_1 - 12{,}1x_2 + 23{,}2x_3 - 14{,}1x_4 = 15{,}5, \\ 2{,}4x_1 - 4{,}4x_2 + 3{,}5x_3 + 5{,}5x_4 = 2{,}5, \\ 5{,}4x_1 + 8{,}3x_2 - 7{,}4x_3 - 12{,}7x_4 = 8{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 7{,}6x_2 + 1{,}34x_3 + 3{,}7x_4 = 12{,}1. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 14{,}4x_1 - 5{,}3x_2 + 14{,}3x_3 - 12{,}7x_4 = -14{,}4, \\ 23{,}4x_1 - 14{,}2x_2 - 5{,}4x_3 + 2{,}1x_4 = 6{,}6, \\ 6{,}3x_1 - 13{,}2x_2 - 6{,}5x_3 + 14{,}3x_4 = 9{,}4, \\ 5{,}6x_1 + 8{,}8x_2 - 6{,}7x_3 - 23{,}8x_4 = 7{,}3. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 1{,}7x_1 + 10x_2 - 1{,}3x_3 + 2{,}1x_4 = 3{,}1, \\ 3{,}1x_1 + 1{,}7x_2 - 2{,}1x_3 + 5{,}4x_4 = 2{,}1, \\ 3{,}3x_1 - 7{,}7x_2 + 4{,}4x_3 - 5{,}1x_4 = 1{,}9, \\ 10x_1 - 20{,}1x_2 + 20{,}4x_3 + 1{,}7x_4 = 1{,}8. \end{cases}$

9	$\begin{cases} 1{,}7x_1 - 1{,}8x_2 + 1{,}9x_3 - 57{,}4x_4 = 10, \\ 1{,}1x_1 - 4{,}3x_2 + 1{,}5x_3 - 1{,}7x_4 = 19, \\ 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 1{,}6x_3 + 1{,}8x_4 = 20, \\ 7{,}1x_1 - 1{,}3x_2 - 4{,}1x_3 + 5{,}2x_4 = 10. \end{cases}$
0	$\begin{cases} 6{,}1x_1 + 6{,}2x_2 - 6{,}3x_3 + 6{,}4x_4 = 6{,}5, \\ 1{,}1x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}2x_3 - 3{,}8x_4 = 4{,}2, \\ 5{,}1x_1 - 5{,}0x_2 + 4{,}9x_3 - 4{,}8x_4 = 4{,}7, \\ 1{,}8x_1 + 1{,}9x_2 + 2{,}0x_3 - 2{,}1x_4 = 2{,}2. \end{cases}$